

- 1) Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles son *necesarias y suficientes* para que un número **natural** n sea divisible por 6.
- (a) n es divisible por 3; (c) $n = 24$; (e) n es par y divisible por 3;
 (b) n es divisible por 12; (d) n^2 es divisible por 6; (f) n es par o divisible por 3.
- ¿Es posible colocar las seis en este esquema, de modo que todas las implicaciones sean ciertas?
 $() \Rightarrow () \Rightarrow () \Leftrightarrow () \Rightarrow () \Rightarrow ()$
- ¿Puede hacerse eso de más de una manera? ¿Se cumple alguna otra implicación?
- 2) En las siguientes proposiciones, x, y son números **reales**. Traduce cada una a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.
- (a) $\forall x (x > 0 \Rightarrow \exists y : (y > 0) \wedge (y^2 = x))$ (c) $\exists x : (1 < x^2) \wedge (x^2 < x)$
 (b) $\exists x : \forall y ((y < x) \vee (y > 5))$ (d) $\forall y \exists x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1)$
- 3) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a sentencias que usen símbolos y cuantificadores, y no contengan palabras.
- (a) *No siempre hay un número entero entre la raíz cuadrada de n y la de $n + 4$.*
 (b) *Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.*
- 4) Razona con palabras por qué no son equivalentes las afirmaciones de cada uno de los siguientes pares (en las que $x, y \in \mathbb{R}$), y explica cuáles de ellas son ciertas.
- (a) $\forall x \exists y : (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ no equivale a $\exists x : \forall y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$.
 (b) $\exists x : \forall y (x < y \wedge y < x + 2)$ no equivale a $\forall x \exists y : (x < y \wedge y < x + 2)$.
- 5) Explica por qué son equivalentes las dos proposiciones: $S \wedge R$, $\neg(S \Rightarrow \neg R)$, ilustrando la explicación con un *diagrama de Venn*. Confírmalo con la *tabla de verdad* de cada una de ellas.
 Haz lo mismo con las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$, $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$.
- 6) Halla expresiones para las siguientes sumas, y pruébalas por **inducción**:
- (i) la suma de los n primeros números naturales: $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$;
 (ii) la suma de los n primeros términos de la **progresión aritmética**: $a + kd, k = 0, 1, \dots, n - 1$;
 (iii) la suma de las n primeras potencias de r : $r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1}$;
 (iv) la suma de los n primeros términos de la **progresión geométrica**: $cr^k, k = 0, 1, \dots, n - 1$;
 (v) la suma de los ángulos de un polígono de n lados.
Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman π radianes.
- 7) Demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ las afirmaciones siguientes:
- (a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$, si $n \geq 1$.
 (c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$; (d) $2^n > 1 + 2n$, si $n > 2$;
 (e) $2^n > n^2 + 1$, si $n > 4$; (f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, si $n \geq 2$.
- 8) Prueba, para todo $n \in \mathbb{N}$, que los números:
 $a_n = 4^n - 1$, $b_n = 7^n - 4^n$ son divisibles por 3; $c_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.
- 9) Demuestra, para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad: $(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \dots (1+q^{2^n}) = (q^{2^{n+1}} - 1)/(q - 1)$.
- 10) Probar que todo número natural mayor que 1, es igual a algún producto de números primos.
 Deducir que hay infinitos primos. Es decir, que hay más de n primos distintos, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 11) Se llama *cuadrado* a un número de la forma a^2 , donde a es un número natural.
 Demuestra que si un natural $n > 0$ es un *cuadrado*, $n + 1$ no puede ser también un *cuadrado*.
 ¿Puede haber racionales r, s , que cumplan: $r^2 = s^2 + 1 > 1$? ¿Puede ser entero uno de ellos?

- 12) Usando la definición del *logaritmo en base b* : $\log_b(x) = a \Leftrightarrow x = b^a$ y la de ' $\log(x) = \ln(x)$ ', que es el *logaritmo en base e* (llamado *natural* o *neperiano*), prueba que para cada $x > 0$ se tiene:

$$\log(x) = \log(10) \log_{10}(x) = \log(2) \log_2(x) ; \quad \log_{10}(x) = \log_{10}(2) \log_2(x) .$$

Verifícalas para valores concretos de x con tu calculadora, y asegúrate de conciliar su notación y la muestra.

- 13) Demuestra por **reducción al absurdo** que $\log_3 222$ no puede ser un número racional.
- 14) Probar, para conjuntos arbitrarios S, T, U y V , que son ciertas las siguientes igualdades.
(Atención: los diagramas de Venn son útiles para orientarse, pero la prueba no debe depender de ellos).
- (a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ (d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
 (b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$ (e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$
 (c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$

- 15) Dados conjuntos A, B, C , con $B \subset A$, explicar en cada caso qué conjuntos X satisfacen las ecuaciones:

$$(i) \begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} , \text{ si sabemos que } C \supset A. \qquad (ii) \begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases} , \text{ si sabemos que } A \cap C = \emptyset .$$

- 16) Razona si, para subconjuntos A, B del **dominio** de una **función** f se tendrá o no en general:

$$(a) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) , \quad (b) f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B) , \\ (c) f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) , \quad (d) f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B) .$$

Para cada inclusión, prueba que se cumple o da un contraejemplo.

- 17) Dadas funciones $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, probar las siguientes afirmaciones:

- (a) f inyectiva \wedge g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.
 (b) f sobre \wedge g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.
 (c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.
 (d) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f , y es sobre si y sólo si lo es f .
 (e) Si además es $X = Z$, lo mismo es cierto para $f \circ g$.

- 18) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0 . \end{cases}$$

- (a) Dibuja los gráficos de las funciones f , g , $g \circ f$ y $f \circ g$.
 (b) Halla las imágenes de cada una de esas funciones y explica si son inyectivas y/o suprayectivas.

- 19) Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = |2x + 1/2| - 1/2$, halla su imagen $f(\mathbb{R})$, y también la $f(\mathbb{Z})$.
 ¿Es f sobre o inyectiva? Prueba que sin embargo sí da una biyección entre \mathbb{Z} y $f(\mathbb{Z})$.

- 20) ¿Cuáles de las siguientes funciones son **inyectivas**? ¿Cuáles **suprayectivas**? ¿Es alguna **biyectiva**? (Empieza por verificar que esas fórmulas definen funciones entre los conjuntos que se indican).

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(m) = m + 2$; (e) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n(n + 1)$;
 (b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(m) = 2m - 7$; (f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;
 (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$; (g) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 1$;
 (d) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + 4x$; (h) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(t) = t/(t + 1)$.

- 21) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. La **imagen inversa** de un subconjunto $A \subset Y$ se define como:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

Dados subconjuntos $A, B \subset Y$, demuestra que

- (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; (c) $f(f^{-1}(A)) = f(X) \cap A$;
 (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; (d) $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$.

- 22) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ divide a } 30\}$ y sea $f : A \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ la aplicación definida por $f(a) =$ número de divisores de A , (se entiende que a es divisible por 1 y por el mismo a). Estudiar:

- a) Si f es inyectiva. b) Si f es exhaustiva. c) Encontrar $\text{Im}(A)$. d) Encontrar $f^{-1}(\{3, 4\})$.

- 23) Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones (cada $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X):

$$a) \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) ; \quad b) \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) ; \quad c) \mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) .$$